LEY DE HOOKE Y MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

1. OBJETIVOS

- Determinar la constante elástica de un muelle a partir de la elongación del mismo cuando se produce equilibrio de fuerzas.
- Determinar la constante elástica de un muelle a partir del movimiento armónico en torno a su posición de equilibrio.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

La **ley de Hooke**[1] da cuenta de la relación que existe entre la fuerza que se aplica a un cuerpo y la deformación que en él se produce. Esta ley es válida cuando las deformaciones son pequeñas y el cuerpo vuelve a su estado original una vez que se deja de aplicar la fuerza. Hablamos entonces de deformaciones *elásticas*. Si tras aplicar la fuerza, la deformación es permanente y el cuerpo no vuelve a su estado original, se dice que la deformación es *plástica*. Ambos tipos de deformaciones son anteriores a su rotura.

Un muelle ideal es un objeto unidimensional sin masa que responde a las deformaciones de forma elástica, consideraremos que el muelle está enganchado por uno de sus extremos a un punto fijo y que en el otro se deja una masa que pueda tener dinámica. En la figura 1(a) está representado un muelle sin deformar de longitud x_0, al no haber deformación no existe una fuerza elástica. En las figuras 1(b) y 1(c) el muelle está deformado en la dirección del mismo, en ambos casos la fuerza ha de ser contraria a la deformación, al reducir el problema a una única dimensión podemos prescindir del carácter vectorial de la fuerza quedando:

$$F_x = -k(x - x_0) \tag{1}$$

donde el subíndice x en la fuerza denota la dirección en la que actúa y k es la constante recuperadora, o constante elástica, del muelle, una medida de la rigidez del muelle, característica de las dimensiones y del material de que está hecho.

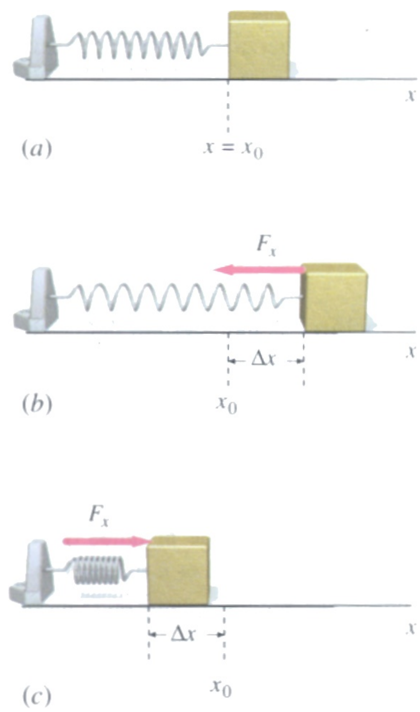

Figura 1: (a) Muelle sin deformar, longitud natural x_0, la fuerza elástica es nula; (b) muelle deformado con una longitud mayor que su longitud natural $\Delta x > 0$, la fuerza elástica del muelle esta en el sentido negativo; (c) muelle deformado con una longitud menor que su longitud natural $\Delta x < 0$, la fuerza elástica del muelle esta en el sentido positivo.

Por la segunda ley de Newton, para que un muelle deformado se mantenga en equilibrio la suma de las fuerzas que actúan sobre el mismo ha de ser nula, por tanto las situaciones de la figura 1 sólo son posibles en equilibrio

[1] Esta ley recibe su nombre de Robert Hooke, físico británico contemporáneo de Isaac Newton. Ante el temor de que alguien se apoderara de su descubrimiento, Hooke lo publicó en forma de un famoso anagrama, *ceiiinosssttuv*, revelando su contenido un par de años más tarde. El anagrama significa *Ut tensio sic vis* (como la extensión, así la fuerza).

si existe una fuerza externa al muelle que mantiene su deformación. Llamamos F_{externa} a la fuerza externa que deberá estar en la misma dirección del muelle por tanto para una situación de equilibrio:

$$F_x + F_{\text{externa}} = 0 \tag{2}$$

Sustituyendo la ecuación (1) en la ecuación (2) llegamos a una relación entre la fuerza externa y la deformación del muelle en equilibrio:

$$F_{\text{externa}} = k(x - x_0) \tag{3}$$

Si una vez deformado el muelle dejamos de aplicar la fuerza que ha producido dicha deformación la única fuerza que actuará sobre el sistema es la fuerza recuperadora del muelle que indica la ecuación (1) que ha de verificar la segunda ley de Newton

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \tag{4}$$

como el problema es unidimensional, y sólo está actuando una fuerza, la dinámica del movimiento vendrá dada por

$$F_x = -k(x - x_0) = ma_x = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \tag{5}$$

donde si tomamos el origen de coordenadas en la posición de la masa en equilibrio podemos reducir la ecuación (5 a:

$$-kx = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \tag{6}$$

Que es la ecuación de un **movimiento armónico simple**.

La solución de la ecuación (6)[2] con velocidad inicial igual a cero y posición inicial A es:

$$x(t) = A\cos(\omega t) \tag{7}$$

donde ω es la frecuencia angular de la oscilación. Esta frecuencia ω se puede escribir en función de las constantes físicas de la ecuación (7) como:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{8}$$

y a su vez se relaciona como el periodo de oscilación, T, como

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{9}$$

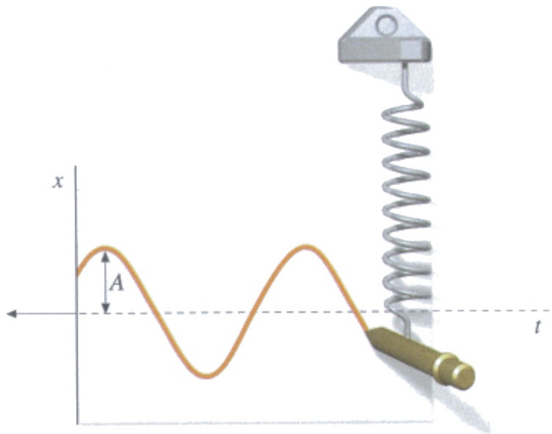

Figura 2: Posición en función del tiempo del extremo de un muelle.

Por lo que, juntando las ecuaciones (8) y (9) obtendremos una relación entre el periodo de oscilación y las constantes físicas del problema:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{10}$$

[2]La solución detallada de la ecuación (6) está en los apuntes del segundo tema de la asignatura.

3. MATERIAL

En la figura 3 se muestra un esquema del dispositivo experimental, el material preciso es:

- Muelle de longitud L_0 con graduación.
- Soporte fijo para el muelle.
- Juego de masas con soporte.
- Cronómetro.

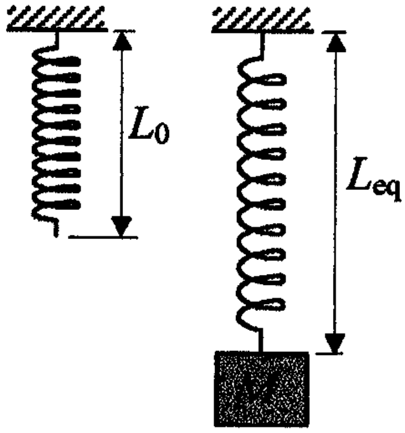

Figura 3: Esquema del dispositivo experimental.

4. MÉTODO EXPERIMENTAL

4.1. Determinación de la constante elástica de un muelle a partir del equilibrio de fuerzas

- Enganchad el muelle al soporte por el extremo fijo, el tornillo superior del mismo se ajustará hasta que el indicador de longitud esté a cero ($x_0 = 0$).
- Colgad del extremo libre del muelle el soporte para las masas. Medid la deformación del muelle cuando éste deje de oscilar.
- Añadid las masas poco a poco. Medid la deformación del muelle cuando éste deje de oscilar. Repetid esto con al menos 6 masas diferentes sin sobrepasar el límite de la graduación.

Tomad los datos correspondientes a la masa que se añade al muelle (porta-masas más las masas extra) y a la deformación del mismo en la tabla de la sección 4.1 de los anexos. Consideraremos los valores de las masas el valor nominal de las mismas sin incertidumbre, las medidas de la longitud tendrán que tener en cuenta la incertidumbre del aparato de medición.

4.2. Determinar la constante elástica de un muelle a partir del movimiento armónico en torno a su posición de equilibrio

- Enganchad el muelle al soporte por el extremo fijo, el tornillo superior del mismo se ajustará hasta que el indicador de longitud esté a cero.
- Colgad del extremo libre del muelle el soporte para las masas.
- Añadid una masa y cuando esté en equilibrio estirad el muelle aproximadamente 2 cm.
- Medid el tiempo que tarda en realizar cinco oscilaciones completas 10 veces.
- Repetid el procedimiento para cinco masas diferentes.

Tomad los datos correspondientes a la masa que se añade al muelle (porta-masas más las masas extra) y a los tiempos que tarda en realizar las 5 oscilaciones en la tabla de la sección 4.2 de los anexos. Consideraremos los valores de las masas el valor nominal de las mismas sin incertidumbre, las medidas de los tiempos tendrán que tener en cuenta la incertidumbre del aparato de medición.

5. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

5.1. Determinación de la constante elástica de un muelle a partir del equilibrio de fuerzas

1. Al colgar una masa del muelle y llegar a una situación de equilibrio la suma de fuerzas que actúan sobre el muelle ha de ser nula. ¿Qué fuerza externa está actuando sobre el muelle según la ecuación (3)?

2. ¿Cuál es la relación funcional entre la longitud del muelle deformado y la masa que produce dicha deformación?

3. Representad en una gráfica la deformación del muelle frente a la masa. Realizad un ajuste mediante mínimos cuadrados de los datos representados y obtened los parámetros de dicho ajuste (pendiente y ordenada en el origen) teniendo en cuenta sus unidades e incertidumbres.

4. ¿Cuál es el significado físico de los parámetros de ajuste obtenidos en el apartado anterior?

5. Obtened a partir de los parámetros de ajuste el valor de la constante elástica del muelle (considerad la aceleración de la gravedad $g = (9.8 \pm 0.1)\,\mathrm{m/s^2}$). ¿Influye en este resultado haber considerado $x_0 = 0$?

5.2. Determinar la constante elástica de un muelle a partir del movimiento armónico en torno a su posición de equilibrio

1. En la tabla recogida en el anexo 4.2 se ha tomado para cada masa el tiempo de cinco oscilaciones 10 veces (t_i). Indicad como se obtendría el tiempo medio de las cinco oscilaciones ($\bar{t}$) así como su incertidumbre. Generad una tabla con los datos de las masas y el tiempo medio de las cinco oscilaciones.

2. La ecuación (10) indica que el periodo de oscilación (T) depende del la raíz cuadrada de la masa. Escribid a partir de ella la expresión para el tiempo de n oscilaciones ($t = nT$) en función de la masa. Linealizad la expresión anterior escribiendo el cuadrado del tiempo que tarda en realizar n oscilaciones en función de la masa.

3. A partir del tiempo medio de las cinco oscilaciones generad una nueva tabla donde una columna sea la masa y otra el tiempo de n oscilaciones al cuadrado, recordad que las incertidumbres de los tiempos se han de propagar. Representad en una gráfica el tiempo de n oscilaciones al cuadrado frente a la masa. Realizad un ajuste mediante mínimos cuadrados de los datos representados y obtened los parámetros de dicho ajuste (pendiente y ordenada en el origen) teniendo en cuenta sus unidades e incertidumbres.

4. ¿Cuál es el significado físico de los parámetros de ajuste obtenidos en el apartado anterior?

5. Obtened a partir de los parámetros de ajuste el valor de la constante elástica del muelle (considerad la aceleración de la gravedad $g = (9.8 \pm 0.1)\,\mathrm{m/s^2}$ y $\pi = 3.14 \pm 0.01$).

5.3. Comparación de los dos métodos para obtener la constante elástica de un muelle

ANEXOS: Plantillas para la toma de datos experimentales

4.1. Determinación de la constante elástica de un muelle a partir del equilibrio de fuerzas

- Medidas de longitud del muelle deformado, x, frente a la masa, m, que provoca la deformación:

m	x

4.2. Determinar la constante elástica de un muelle a partir del movimiento armónico en torno a su posición de equilibrio

- Medidas de los tiempos de 5 oscilaciones, t_i, frente a la masa, m, que oscila:

m	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}