

SEMINARIO DE RELATIVIDAD

COLISIONES RELATIVISTAS

1 Objetivos

- Estudiar las leyes fundamentales que rigen las colisiones entre partículas relativistas.
- Mostrar algunas de las técnicas experimentales empleadas para analizar este tipo de colisiones.
- Comprobar, usando estas técnicas, que las definiciones relativistas de cantidad de movimiento y energía son correctas.
- Ilustrar las diferencias entre las descripciones clásica y relativista de los procesos de colisión.

2 Material

- Fotografías
- Porta-ángulos y regla graduada
- Papel vegetal

3 Introducción

En esta práctica analizaremos las leyes que rigen los procesos de colisión entre partículas cuando las velocidades de las partículas se aproximan a la velocidad de la luz. Para estudiar estos procesos hay que hacer uso de la Teoría Especial de la Relatividad, por lo que reciben el nombre de *colisiones relativistas*, para distinguirlas de las colisiones que tienen lugar a baja velocidad en comparación con la de la luz, que suelen denominarse *colisiones clásicas*.

En una colisión, dos objetos se aproximan el uno al otro, interaccionan entre sí y se separan. Antes de la colisión, cuando están alejados, los objetos se mueven con velocidades constantes. Después de la colisión se mueven con velocidades constantes, pero distintas. Normalmente, nos interesa conocer cómo será el estado final de los objetos (velocidad, cantidad de movimiento, energía,...) cuando su estado inicial y las características de la colisión son conocidas. Para ello, como vamos a mostrar en esta práctica, usamos normalmente las *leyes de conservación de la energía y de la cantidad de movimiento*:

- (a) *la conservación de la cantidad de movimiento*, según la cual la cantidad de movimiento total antes y después de la colisión debe ser la misma:

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f, \quad (1)$$

donde \vec{P}_i es la cantidad de movimiento total antes de la colisión, suma de las cantidades de movimiento de cada una de las partículas antes de la colisión; \vec{P}_f es la cantidad de movimiento total después de la colisión.

- (b) *la conservación de la energía total*: la energía total antes de la colisión (energía cinética + energía interna de las partículas) debe ser igual a la energía total después de la colisión:

$$E_i = E_f, \quad (2)$$

donde E_i es la energía total del sistema antes de la colisión, suma de las energías de cada una de las partículas antes de la colisión; E_f es la energía total después de la colisión. Distinguiamos dos casos principales:

- *Colisiones elásticas*: la energía interna de las partículas que colisionan no cambia como consecuencia de la colisión. Por tanto, como la energía total es la suma de la energía interna más la energía cinética y debe conservarse, esto significa que *en una colisión elástica se conserva la energía cinética*:

$$T_i = T_f, \quad (3)$$

donde T_i es la energía cinética total antes de la colisión, suma de la energía cinética de cada una de las partículas antes de la colisión, y T_f es la energía cinética total después de la colisión.

- *Colisiones inelásticas*: en este caso, parte de la energía cinética inicial del sistema se emplea en variar la energía interna. Esto ocurre, por ejemplo, cuando como consecuencia de la colisión uno de los objetos queda deformado: parte de la energía cinética inicial se emplea en deformar uno de los objetos, aumentando su energía elástica interna. La energía total se conserva (energía cinética + energía interna) pero la energía cinética disminuye. La cantidad de energía cinética perdida depende del grado de inelasticidad de la colisión. Un caso especial de colisión inelástica se produce cuando los objetos quedan unidos después de la colisión: entonces decimos que tenemos una colisión *totalmente inelástica*.

Cuando las velocidades de las partículas que colisionan es muy pequeña en comparación con la de la luz (*colisiones clásicas*), el proceso de colisión es descrito mediante estas leyes de conservación usando las definiciones clásicas para la cantidad de movimiento \vec{p} y la energía cinética T de una partícula:

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad (4)$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}, \quad (5)$$

donde \vec{v} es la velocidad de la partícula.

Sin embargo, cuando las velocidades de las partículas se aproximan a la velocidad de la luz (*colisiones relativistas*), la descripción clásica de las colisiones, usando las definiciones anteriores de cantidad de movimiento y energía, deja de ser válida. Las leyes de conservación de la cantidad de movimiento y de la energía total siguen siendo ciertas, pero las definiciones clásicas de cantidad de movimiento, energía cinética, etc, deben modificarse para que a estas velocidades sigan verificándose estas leyes fundamentales de la naturaleza. La Teoría de la Relatividad proporciona la definición correcta de estas cantidades dinámicas en todo el rango de velocidades (desde cero, en que coinciden con su definición clásica, hasta velocidades próximas a la velocidad de la luz):

- la *cantidad de movimiento* \vec{p} de una partícula relativista de masa m y velocidad \vec{v} se define:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (6)$$

- la *energía total* E de una partícula relativista está dada por la suma de su energía cinética T más una energía mc^2 (c es la velocidad de la luz) asociada a la masa de la partícula y que recibe el nombre de energía en reposo de la partícula:

$$E = T + mc^2 \quad (7)$$

La masa, por tanto, aparece como una forma de energía: la masa total antes y después de la colisión puede ser distinta con tal de que la energía total (energía cinética + energía en reposo) se conserve, es decir, con tal de que se convierta en una cantidad equivalente de energía cinética. Esta situación contrasta con la Física Clásica, en la que se supone que la masa total antes y después de la colisión es siempre la misma.

La energía total de una partícula se puede escribir en función de su cantidad de movimiento \vec{p} :

$$E = T + mc^2 = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \quad (8)$$

De este modo, la relación entre la energía cinética de una partícula y su cantidad de movimiento estará dada por:

$$T = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2, \quad (9)$$

frente a su definición clásica $T = p^2/2m$.

La evidencia más directa de la validez de las leyes de conservación de la energía y de la cantidad de movimiento en las colisiones relativistas, y con ello de las definiciones relativistas de cantidad de movimiento y energía, procede del campo de la *Física de Altas Energías*: partículas elementales son aceleradas mediante campos eléctricos intensos a altas energías y velocidades próximas a la de la luz. La colisión entre estas partículas puede ser analizada y, de este modo, comprobar la validez de las leyes de conservación para describir estos procesos.

En lo que sigue, tendremos como objetivos:

- (a) conocer una de las técnicas usadas para detectar las trayectorias de partículas elementales.
- (b) aprender uno de los métodos usados habitualmente para determinar a partir de las trayectorias de la partículas, su cantidad de movimiento y, por tanto, su energía cinética y su energía total.
- (c) estudiar usando estas técnicas y aplicando las leyes de conservación de la energía y de la cantidad de movimiento procesos de colisión entre partículas relativistas.

4 Trayectorias de Partículas Elementales: La Cámara de Niebla

Las partículas de la física microscópica son demasiado pequeñas, y se mueven demasiado deprisa para que las podamos captar con nuestros sentidos. Todo lo que conocemos acerca de estas partículas nos viene dado por medio de instrumentos diseñados específicamente para este fin.

Para que una partícula pueda ser observada es preciso que produzca un efecto medible en un detector. Debe interactuar con el detector de alguna manera. Casi todos los detectores emplean un proceso de ionización, en el que la partícula detectada crea un par de iones al arrancar un electrón a algunas de las moléculas del detector. De este modo, las partículas cargadas son las más fáciles de detectar, ya que actúan sobre los electrones de las moléculas del detector que encuentran en su camino. Los neutrones, en cambio, son difíciles de detectar ya que no interactúan con los electrones.

Existen distintos tipos de detectores. El tipo de detector usado depende del tipo de información que se quiera obtener. *La Cámara de Niebla* constituye uno de los detectores usados para poder visualizar la trayectoria de partículas elementales. Consiste en un recinto lleno de aire u otro gas a una temperatura ligeramente superior a la de condensación. La cámara está diseñada de tal modo que su volumen puede ser rápidamente aumentado. Esta expansión hace que el vapor alcance una temperatura inferior a la de condensación, sin dejar por ello de ser vapor. Parte del vapor puede ahora condensarse, esto es, el vapor se encuentra en un estado metaestable. El vapor se condensa más fácilmente si existen en su interior partículas cargadas. Por tanto, si el gas es atravesado por una partícula cargada, que produce la ionización de algunas de las moléculas del gas a lo largo de su trayectoria, el vapor se condensará sobre esos iones, y la partícula se hará visible por medio de una traza de gotas de líquido.

De este modo se pueden visualizar en una cámara de niebla las trayectorias de partículas elementales cargadas y, por tanto, se puede usar una cámara de niebla para seguir las

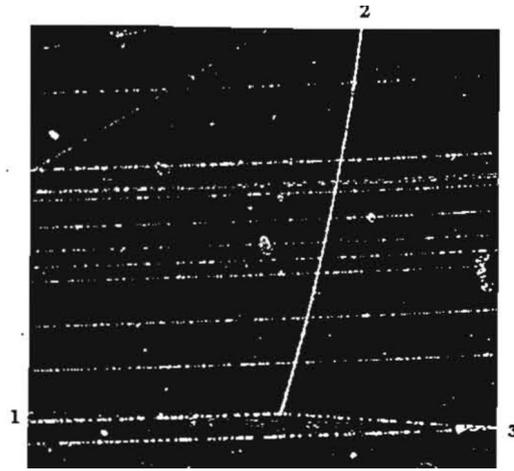


Figure 1:

trayectorias de las partículas durante una colisión. Tomando una fotografía de estas trayectorias, podremos después estudiar en detalle las características de esta colisión. En Fig. 1 se muestra una fotografía en una cámara de niebla de la colisión elástica de dos protones: en esta fotografía se pueden apreciar las trayectorias del protón incidente (1), y las trayectorias de los dos protones (2) y (3) después de la colisión. Uno de los protones se encontraba inicialmente en reposo.

Es conveniente hacer notar que en una cámara de niebla sólo se pueden detectar trayectorias de partículas cargadas. Una partícula neutra, como un neutrón, no deja rastro en una cámara de niebla.

5 Análisis Magnético de Partículas Relativistas

La cámara de niebla nos permite registrar las trayectorias de las partículas, pero no nos dice nada, en principio, acerca de su cantidad de movimiento o de su energía. Uno de los medios principales empleados con este fin es estudiar las trayectorias de las partículas en un campo magnético conocido, lo que nos permite conocer tanto el signo de la carga como la cantidad de movimiento de la partícula.

La trayectoria de una partícula cargada experimenta una desviación en presencia de un campo magnético. La curvatura que exhiben las trayectorias de las partículas en la fotografía mostrada en Fig. 1 es debida a un campo magnético perpendicular al plano de la página.

Esta desviación tiene su origen en que una carga q en movimiento en un campo magnético \vec{B} experimenta una fuerza transversal proporcional a su velocidad según la ley

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (10)$$

Así, la fuerza que ejerce un campo magnético sobre una partícula cargada es siempre perpendicular a su velocidad. Una fuerza perpendicular a la velocidad produce un cambio en la dirección del movimiento, pero no un cambio en la magnitud de la velocidad (y, por

tanto, en la magnitud de la cantidad de movimiento), para lo que sería necesario un fuerza en la dirección del movimiento de la partícula. Si la partícula se mueve en un campo magnético uniforme (igual en todos los puntos) perpendicular a la velocidad, el resultado es que la partícula describe una trayectoria circular en un plano perpendicular a \vec{B} . Se puede demostrar que la relación entre el radio de curvatura r de esta trayectoria, la cantidad de movimiento p de la partícula y el campo B está dada por:

$$p = qBr \quad (11)$$

donde q es la carga eléctrica de la partícula. Es interesante observar que este resultado es el mismo que se obtiene clásicamente, exceptuando que en la expresión (11) $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, en lugar de $\vec{p} = m\vec{v}$.

En muchos casos, podemos estar seguros de que $q = \pm e$ (e es la carga del electrón), por lo que una vez conocido B y medido el radio de curvatura r de la trayectoria, resulta sencillo determinar la cantidad de movimiento de la partícula. Esta técnica, de este modo, permite obtener una cantidad de información importante sobre el estado dinámico de las partículas antes y después de una colisión.

5.1 Determinación del radio de curvatura de la trayectoria

Como acabamos de ver, para conocer la energía de una partícula cargada en una cámara de niebla, basta con determinar el radio de curvatura r de su trayectoria en presencia de un campo magnético B ($p = qBr$).

Fig. 2 ilustra un método sencillo para obtener dicho radio de curvatura:

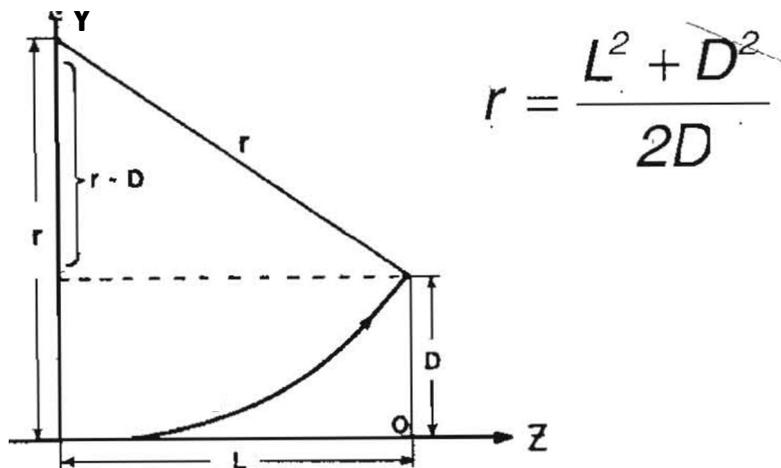


Figure 2:

1. Se escogen dos puntos de la trayectoria. La distancia de cada uno al centro de la trayectoria debe ser igual al radio de curvatura r que queremos determinar, tal y como se indica en la figura.

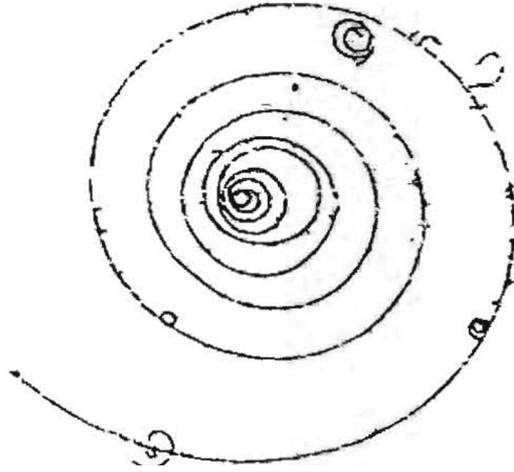


Figure 3:

2. A continuación trazamos la tangente a la trayectoria en el primero de los puntos escogidos (eje z en la figura) y desde el segundo punto se traza la perpendicular a dicha tangente (el punto de corte se designa en la figura por O).
3. Se mide la distancia L del primer punto de la trayectoria al punto de corte O y la distancia D del segundo punto de la trayectoria al punto O . Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de hipotenusa r , y catetos L y $r - D$, mostrado en la figura, se obtiene:

$$L^2 + (r - D)^2 = r^2,$$

con lo cual el radio de curvatura será,

$$r = \frac{L^2 + D^2}{2D} \quad (12)$$

Cuestión

Como ejemplo de aplicación, consideraremos la trayectoria mostrada en Fig. 3, que corresponde a un electrón moviéndose en un campo magnético $B = 1.2 \pm 0.02$ T perpendicular al plano de la figura. El tamaño de la figura es el 70% del tamaño de la trayectoria real.

El electrón en presencia del campo B debe describir una trayectoria circular. La forma en espiral de la trayectoria mostrada en Fig. 3 se debe a la pérdida de energía del electrón, debida entre otras causas a las colisiones con otras partículas del medio, lo que determina una pérdida de cantidad de movimiento y, en consecuencia, una reducción paulatina del radio de curvatura de la trayectoria ($r = p/qB$).

- Determinar, siguiendo el método descrito anteriormente, el radio de curvatura r correspondiente a la parte inicial de la trayectoria del electrón (la parte inferior en Fig. 3; no olvidar la escala de la figura).

- Obtener la cantidad de movimiento y la energía inicial del electrón.
- Calcular la velocidad del electrón usando la definición clásica de cantidad de movimiento. ¿Por qué el resultado obtenido no es correcto?. Obtener la velocidad real del electrón usando la definición relativista de cantidad de movimiento.

Nota: (i) expresar la cantidad de movimiento del electrón en unidades de MeV/c ó GeV/c , y su energía en unidades de MeV ó GeV . Para ello recordar que $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$, $1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$, y $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ julios}$; (ii) todas las cantidades medidas y calculadas deben ir acompañadas de sus correspondientes errores.

Datos: carga del electrón, $e \equiv 1.6 \times 10^{-19} \text{ culombios}$; $c = 2.9979 \times 10^8 \text{ m/s}$; masa del electrón, $m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$.

6 Análisis de Colisiones Relativistas

En esta sección, usaremos las técnicas que acabamos de describir para analizar colisiones entre partículas a velocidades relativistas (próximas a la velocidad de la luz).

(A) Colisión elástica protón-protón

Estudiaremos un proceso de colisión elástica entre dos protones relativistas. Comprobaremos las leyes que rigen la colisión entre los protones y demostraremos que un análisis clásico de este proceso conduce a resultados incorrectos.

La fotografía que se ha suministrado muestra un choque elástico protón-protón (ver Fig. 1) en una cámara de niebla de hidrógeno. El protón 1 incide con una energía cinética de 3 ± 0.06 GeV sobre un protón en reposo. Las trayectorias de los dos protones después de la colisión se indica mediante los números 2 y 3. Las trayectorias de interés han sido destacadas. Las trayectorias de los protones se curvan debido a un campo magnético perpendicular al plano del papel, $B = 1.70 \pm 0.07$ Teslas, y los radios de curvatura de las trayectorias 2 y 3 son, respectivamente: $r_2 = 66.9 \pm 0.5$ cm, $r_3 = 7.34 \pm 0.10$ m.

- Determinar la cantidad de movimiento del protón incidente, y usar la relación (11) para obtener la cantidad de movimiento de los protones después de la colisión a partir de la curvatura de sus trayectorias en presencia del campo B .
- Medir el ángulo que forman las trayectorias de los protones después de la colisión, y comprobar que la cantidad de movimiento total antes y después de la colisión es la misma. Para medir bien este ángulo, dibujar las trayectorias de los protones sobre papel vegetal y medir sobre el papel este ángulo. Fijarse en que las trayectorias se curvan: para determinar correctamente el ángulo, lo mejor es trazar las tangentes a las trayectorias en el punto de salida y medir el ángulo entre ellas.
- Demostrar, usando la expresión (9) para la energía cinética relativista, que la energía cinética se conserva en la colisión elástica de los protones. Comprobar que, usando la expresión clásica $T = p^2/2m$ para la energía cinética, llegaríamos a la conclusión errónea de que la energía cinética no se conserva en una colisión elástica.
- Un segundo argumento que demuestra claramente la invalidez de la descripción clásica de la colisión elástica entre los protones, se basa en el ángulo de salida de los protones después de la colisión. Este ángulo, como se habrá medido anteriormente, es menor de 90° . Demostrar que un análisis clásico de una colisión elástica entre partículas idénticas (de igual masa) como la que aquí se analiza, basado en la conservación de la cantidad de movimiento y de la energía cinética definida como $T = p^2/2m$, lleva a la conclusión de que el ángulo de salida debe ser igual a 90° , en desacuerdo con el ángulo observado experimentalmente en la fotografía.

Nota: expresar la cantidad de movimiento de las partículas en unidades de MeV/ c ó GeV/ c , y la energía de las partículas en unidades de MeV ó GeV. Para ello recordar que $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$, $1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$, y $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19}$ julios;

Datos: carga del electrón, $e \equiv 1.6 \times 10^{-19}$ culombios; $c = 2.9979 \times 10^8 \text{ m/s}$; masa del protón, $m_p = 938.3 \text{ MeV}/c^2$.

(B) Colisión inelástica pión-protón

En este ejemplo, emplearemos las leyes de conservación de la cantidad de movimiento y de la energía total¹ (energía cinética + energía en reposo) para analizar colisiones inelásticas entre partículas relativistas.

Este proceso se muestra en la fotografía que se ha suministrado con este fin y se ilustra en Fig. 4.

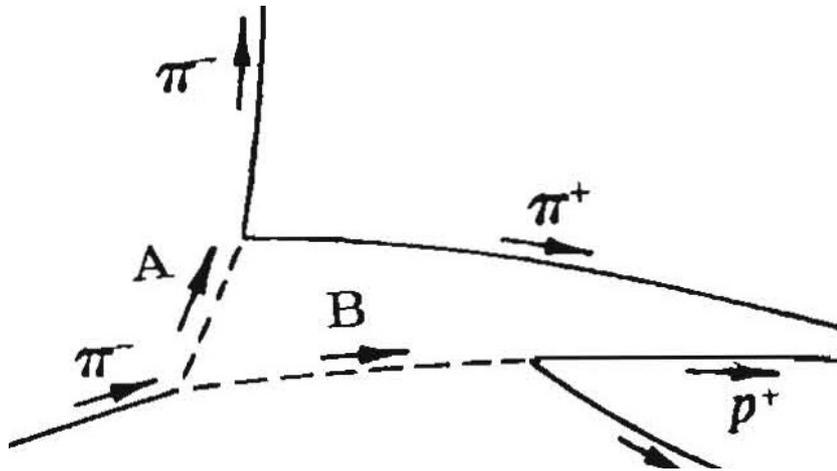


Figure 4:

Se trata de la fotografía de la colisión de un mesón π^- con un protón en una cámara de niebla de hidrógeno de 500 litros. El π^- entra a gran velocidad por la izquierda y choca con un protón en reposo. La trayectoria del π^- acaba abruptamente en el punto de la colisión originándose dos partículas neutras, A y B , de momento desconocidas, que al no estar cargadas no dejan rastro en la cámara de niebla. Estas partículas neutras, después de recorrer un cierto camino, se descomponen en parejas de partículas cargadas ($A \rightarrow \pi^+ + \pi^-$; $B \rightarrow \pi^- + p$), cuyas trayectorias aparecen en la cámara de niebla. Debido a un campo magnético perpendicular al plano del papel, $B = 1.5 \pm 0.03$ Teslas, las trayectorias de estas partículas se curvan, y sus radios de curvatura son:

$$\begin{aligned} A : r_{\pi^+} &= 49.1 \pm 0.5 \text{ cm}; & r_{\pi^-} &= 88.7 \pm 0.6 \text{ cm}; \\ B : r_p &= 2.32 \pm 0.04 \text{ m}; & r_{\pi^-} &= 11.5 \pm 0.4 \text{ cm}; \end{aligned}$$

- Determinar la cantidad de movimiento de las partículas neutras A y B , producto de la colisión (π^-, p) , y de cada una de las partículas resultantes de las desintegraciones de A y de B .

¹Notar que mientras en una colisión elástica se conserva la energía cinética porque la energía en reposo antes y después de la colisión son iguales, en una colisión inelástica la energía en reposo cambia y por tanto la energía cinética no es la misma antes y después de la colisión. Sin embargo, la energía total (energía cinética + energía en reposo) siempre se conserva en cualquier tipo de colisión.

- Identificar las partículas desconocidas A y B usando la tabla que se da al final del guión. Notar que la masa se da en unidades de MeV/c^2 .
- Determinar la energía cinética del π^- inicial que choca con el protón en reposo.

Nota: para medir bien los ángulos que forman las trayectorias de las partículas resultantes de la desintegración de A y B , dibujar estas trayectorias sobre papel vegetal y medir sobre el papel estos ángulos. Fijarse en que las trayectorias se curvan: para determinar correctamente el ángulo, lo mejor es trazar las tangentes a las trayectorias en el punto de salida y medir el ángulo entre ellas.

Nombre y símbolo		Masa (MeV/ c^2)	Carga (unidades de e)
Positrón, electrón	e^+, e^-	0.511	± 1
Muón	μ^+, μ^-	105.7	± 1
Mesón pi	π^+, π^-	139.6	± 1
Mesón K más, K menos	K^+, K^-	493.8	± 1
Mesón K cero	K^0	497.8	0
Protón	p^+	938.3	1
Neutrón	n	939.6	0
Lambda	Λ^0	1115.4	0
Sigma más	Σ^+	1189.4	1
Sigma cero	Σ^0	1192.3	0
Sigma menos	Σ^-	1197.2	-1
Xi cero	Ξ^0	1314.3	0
Xi menos	Ξ^-	1320.8	-1
Omega menos	Ω^-	1675.0	-1